

# **INSTRUMENTACION DE LA METODOLOGIA VAR (\*)**

**Fernando C. Ballabriga**

(\*) Este artículo ha sido elaborado para su publicación en Cuadernos Económicos de ICE.

Banco de España. Servicio de Estudios  
Documento de Trabajo n.º 9108

El Banco de España al publicar esta serie pretende facilitar la difusión de estudios de interés que contribuyan al mejor conocimiento de la economía española.

Los análisis, opiniones y conclusiones de estas investigaciones representan las ideas de los autores, con las que no necesariamente coincide el Banco de España.

ISBN: 84-7793-090-2

Depósito legal: M. 12337 - 1991

Imprenta del Banco de España

## 1. INTRODUCCION

El propósito de este artículo es describir los detalles técnicos asociados con la estimación y uso de Vectores Autorregresivos (VAR). Un Vector Autorregresivo es un sistema lineal de ecuaciones estocásticas en diferencias que para todo  $t$  puede escribirse de la forma

$$[I - B(L)] Y(t) = D(t) + \epsilon(t) \quad (1)$$

donde

$Y(t)$  es  $n \times 1$

$$B(L) = \sum_{s=1}^m B_s L^s$$

$B_s$  es  $n \times n$ ,  $s = 1, \dots, m$

$L$  es el operador de retardos

$D(t)$  es un vector  $n \times 1$  de componentes determinísticos

$\epsilon(t)$  es  $n \times 1$ , ruido blanco con  $E_t \epsilon(t) = 0$ ,  $E_t \epsilon(t) \epsilon(t)' = \Sigma$

$E_t$  representa expectativas basadas en la información disponible al principio del período  $t$ .

Los modelos VAR fueron originalmente propuestos por Sims (1980) como alternativa metodológica a la modelización econométrica convencional<sup>1</sup>. El objetivo fundamental de la propuesta era proporcionar una estrategia de modelización que al evitar la generosa

imposición de restricciones en que se apoya la identificación de los modelos econométricos convencionales, permitiera especificar modelos que reflejaran lo más fielmente posible las regularidades empíricas e interacciones entre las variables objeto de análisis.

Un primer problema básico a que se enfrenta el analista que pretenda instrumentar esta idea es el de la rápida desaparición de los grados de libertad en un modelo como (1). En concreto, si escribimos  $D(t) = SQ(t)$ , con  $Q(t)$  un vector  $d$ -dimensional de variables determinísticas y  $S$  una matriz  $n \times d$  de coeficientes, el modelo (1) contiene  $n(nm+d)$  parámetros, número que depende de forma cuadrática del número de variables incluidas en el sistema. La sección 2 describe como superar este problema mediante el uso del método bayesiano de estimación.

El estudio de las interacciones dinámicas estimadas es una de las motivaciones fundamentales de los usuarios de los modelos VAR, y, de hecho, los usos típicos de estos modelos reflejan esta motivación. Tales usos son el cómputo de las funciones impulso-respuesta y de la descomposición de la varianza del error de predicción. Se describen en la sección 3.

Las implicaciones dinámicas del modelo estimado dependerán evidentemente de la estructura de correlaciones contemporáneas reflejada en la matriz  $\Sigma$ . El estudio de tales implicaciones debe por tanto incorporar esta estructura de correlaciones. Explicar cómo realizar esta incorporación es el objeto de la sección 4. La sección 5 termina el artículo con una breve referencia a una aplicación de la metodología a la economía española.

Todos los aspectos metodológicos tratados en las líneas que siguen pueden instrumentarse con un grado aceptable de sofisticación mediante el paquete de aplicaciones RATS (Regression Analysis of Time Series).

## 2. ESTIMACION BAYESIANA DE UN VECTOR AUTORREGRESIVO

Por gozar de amplia familiaridad, es conveniente utilizar la notación del análisis de regresión convencional en el análisis que sigue. En concreto, si permitimos que los parámetros del modelo sean función del tiempo, (1) puede reescribirse como

$$Y(t) = X(t)\beta(t) + \varepsilon(t) \quad (2)$$

donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t)' \\ \vdots \\ X_n(t)' \end{pmatrix} \cdot$$

$$X_i(t)' = (Y(t-1)' \dots Y(t-m)' Q(t)')$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$\beta(t)' = (\beta_1(t) \dots \beta_n(t))$$

La dimensión de  $X_i(t)'$  es  $1 \times k$ ,  $k = mn+d$ , y la de  $X(t)$   $n \times kn$ . El subvector  $\beta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , contiene superpuestas las filas  $i$ -ésimas de las matrices de coeficientes  $B_s(t)$ ,  $s = 1, \dots, m$  y  $S(t)$ .

De acuerdo con (2), la completa especificación de las propiedades estocásticas de  $Y(t)$  condicionado en  $X(t)$  exige explicitar las de  $\beta(t)$  y  $\varepsilon(t)$ . Nuestros supuestos serán los siguientes para todo  $t$

$$i) \quad \beta(t) = A\beta(t-1) + u(t), \quad A \text{ es } kn \times kn$$

$$\text{ii) } [\beta(t-1)|X(t)] \sim N(\tilde{\beta}(t-1), \Omega(t-1))$$

$$\text{iii) } [u(t)|X(t)] \sim N(0, \psi)$$

$$\text{iv) } [\varepsilon(t)|X(t), \beta(t)] \sim N(0, \Sigma)$$

$$\text{v) } u(t), \varepsilon(t) \text{ y } \beta(t-1) \text{ independientes}$$

Estos supuestos permiten que el análisis transcurra en un marco gaussiano. Obsérvese que el modelo (1) se obtiene como caso particular cuando  $A = I$  y  $\psi = 0$ .

Desde una perspectiva bayesiana, el problema de estimación es obtener la distribución de  $[\beta(t)|X(t), Y(t)]$  partiendo de la distribución de  $[\beta(t)|X(t)]$  y la nueva información incorporada en el vector de observaciones  $Y(t)$ . Una estrategia adecuada es obtener en un primer paso la distribución conjunta de  $\beta(t)$  e  $Y(t)$  condicionada en  $X(t)$  para proceder a continuación a condicionar en  $Y(t)$ . En concreto, combinando (2) y iv) obtenemos

$$[Y(t)|X(t), \beta(t)] \sim N(X(t)\beta(t), \Sigma) \quad (3)$$

y combinando los supuestos i), ii), iii) y v)

$$[\beta(t)|X(t)] \sim N(\beta^*(t), \Omega^*(t)) \quad (4)$$

donde

$$\beta^*(t) = A\tilde{\beta}(t-1)$$

$$\Omega^*(t) = A\Omega(t-1)A' + \psi$$

De acuerdo con las reglas de probabilidad usuales, la función de densidad conjunta de  $\beta(t)$  e  $Y(t)$  condicionada en  $X(t)$  es

el producto de las densidades en (3) y (4). Para constatar que tal densidad es la normal multivariante, obsérvese que  $\forall a \in R^{n+kn}$  podemos escribir<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} a' \begin{pmatrix} Y(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} &= a'_1 Y(t) + a'_2 \beta(t) \\ &= a'_1 [X(t) \beta(t) + \epsilon(t)] + a'_2 \beta(t) \\ &= [a'_1 X(t) + a'_2] \beta(t) + a'_1 \epsilon(t) \end{aligned} \quad (5)$$

donde (2) y la partición apropiada de  $a$  en  $a_1$ ,  $n \times 1$ , y  $a_2$ ,  $nk \times 1$ , han sido utilizadas. Los supuestos i)-v) garantizan que, condicionando en  $X(t)$ , (5) es una combinación lineal de normales independientes y, por tanto, normal; lo que prueba que  $[Y(t) \beta(t)]$  tiene una distribución normal multivariante. Su caracterización se obtiene fácilmente combinando (2) y (4); en concreto, se tiene

$$\begin{pmatrix} Y(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \left| X(t) \right. \sim N \left( \begin{pmatrix} X(t)\beta^*(t) \\ \beta^*(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X(t)\Omega^*(t)X(t)' + \Sigma & X(t)\Omega^*(t) \\ \Omega^*(t)X(t)' & \Omega^*(t) \end{pmatrix} \right) \quad (6)$$

Y a partir de (6) la obtención de la distribución buscada es directa:

$$[\beta(t) \mid X(t), Y(t)] \sim N(\tilde{\beta}(t), \Omega(t)) \quad (7)$$

donde

$$\tilde{\beta}(t) = \beta^*(t) + \Omega^*(t)X(t)'M[Y(t) - X(t)\beta^*(t)]$$

$$\Omega(t) = \Omega^*(t) - \Omega^*(t)X(t)'M X(t)\Omega^*(t)$$

$$M = [X(t)\Omega^*(t)X(t)' + \Sigma]^{-1}$$

La información a priori

La estimación se completa cuando se han procesado todas las observaciones muestrales de acuerdo con las ecuaciones de actualización explicitadas en (7). Obviamente, llevar a término el proceso requiere especificar A,  $\psi$  y  $\Sigma$ , así como la distribución (4) para  $t=1$ , distribución que debe ser interpretada como condicional en la historia premuestral.

Como ya se ha mencionado, un principio básico de la metodología VAR es evitar a priori exclusiones injustificadas de variables. Una especificación de (4) en  $t=1$  que sin ser controvertida desde el punto de vista económico sirve a este propósito es la siguiente:

$$\beta^*_i(1)' = (0, \dots, \tau_i, 0, \dots, 0) \quad i = 1, \dots, n$$

donde  $\tau_i$  ocupa la posición  $i$ -ésima y representa la media a priori del coeficiente del primer retardo de la variable dependiente en la ecuación  $i$ . Para  $\Omega^*(1)$  se especifica una estructura diagonal con elementos dados por

$$\sigma^2_{ij}(s) = \left(\frac{\tau_{n+i}}{s}\right) \sigma_{\epsilon_i} \quad i = 1, \dots, n; \quad i = j; \quad s = 1, \dots, m$$

$$\sigma^2_{ij}(s) = \left(\frac{\tau_{n+i} \tau_{2n+i}}{s}\right) \left(\frac{\sigma_{\epsilon_i}}{\sigma_{\epsilon_j}}\right) \quad i = 1, \dots, n; \quad i \neq j, \quad s = 1, \dots, m$$

$$\sigma^2_{ih} = \tau_{n+1} \tau_{3n+i} \sigma_{\epsilon_i} \quad i = 1, \dots, n; \quad h = 1, \dots, d$$

donde  $i$  representa ecuación,  $j$  variable endógena,  $s$  retardo y  $h$  variable determinística.  $\tau_{n+i}$  controla el grado global de



incertidumbre con que se incorpora la información a priori en el modelo; mientras que  $\tau_{2n+i}$  y  $\tau_{3n+i}$  controlan, respectivamente, el tamaño relativo de las varianzas de los coeficientes de los retardos de variables endógenas distintas de  $i$  y de los coeficientes de las variables determinísticas, con respecto a la varianza de los coeficientes de los retardos de la variable dependiente en  $i$ . La división por  $s$  aumenta el peso recibido por los retardos recientes, y la introducción de  $\sigma_e$  (elementos de la diagonal de  $\Sigma$ ) sirve como punto de referencia para evaluar el grado de incertidumbre introducida, al tiempo que permite corregir la información a priori en función de las unidades de medida de las distintas variables.

La introducción de coeficientes que dependen del tiempo tiene como objetivo capturar posibles no linealidades en el vector estocástico modelado. Una estructura diagonal para  $A$  y  $\psi$  simplifica el modelo y es adecuada para tal propósito. En concreto, especificamos

$$A = \text{diag} (A_1, \dots, A_n)$$

$$A_i = \text{diag} (\tau_{4n+i}) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\psi = \text{diag} (J_1, \dots, J_n) \Omega^*(1)$$

$$J_i = \text{diag} (\tau_{5n+i}) \quad i = 1, \dots, n$$

Por lo que respecta a  $\Sigma$ , puede, por supuesto, parametrizarse, aunque es usual en las aplicaciones comenzar con una estimación obtenida a partir de modelos autorregresivos univariantes de cada una de las variables endógenas del sistema.

Para completar la especificación de la información a priori sólo resta asignar valores a los componentes del vector  $\tau' = (\tau_1, \dots, \tau_{6n})$ . Tal asignación puede realizarse mediante un proceso más o menos elaborado de búsqueda guiada por algún criterio de

bondad de ajuste. Sin embargo, una información a priori estandar y adecuada a los propósitos de la metodología VAR es la siguiente

$$\tau_i = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\tau_i = .1 \quad i = n+1, \dots, 2n$$

$$\tau_i = .5 \quad i = 2n+1, \dots, 4n$$

$$\tau_i = .99 \quad i = 4n+1, \dots, 5n$$

$$\tau_i = .5 \quad i = 5n+1, \dots, 6n$$

Esta especificación prima los retardos de la variable dependiente sobre los de las demás variables, y entre los retardos de la variable dependiente prima el primer retardo sobre el resto<sup>3</sup>. Con respecto a la ley de movimiento de los coeficientes, se especifica algo cercano al paseo aleatorio con un término de error cuya variabilidad es sensiblemente inferior a la introducida para los propios coeficientes<sup>4</sup>.

### 3. USOS DE UN VECTOR AUTORREGRESIVO

Una vez estimado, el uso que puede hacerse de un modelo VAR es el usual de un modelo econométrico. Existen, sin embargo, dos ejercicios típicos que suelen realizarse con este tipo de modelos que son útiles para el análisis de las interacciones dinámicas que caracterizan al sistema estimado. El primero es la simulación de los efectos de shocks a las distintas perturbaciones aleatorias del sistema: el cómputo de la denominada función impulso-respuesta. El segundo es la descomposición de la varianza del error de predicción en componentes asociados a las distintas perturbaciones.

#### La Función Impulso-Respuesta

Esta función es simplemente la representación de medias móviles asociada con el modelo estimado, y se obtiene invirtiendo el operador autorregresivo. En concreto, si definimos<sup>5</sup>

$$[I-B(L)]^{-1} \equiv M(L) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} M_s L^s$$

a partir de (1) podemos escribir

$$Y(t) - M(L)D(t) = \sum_{s=0}^{\infty} M_s \epsilon(t-s) \quad (8)$$

expresión en la que puede apreciarse que la respuesta del componente no determinístico de  $Y_i(t)$ ,  $i=1, \dots, n$ , a un shock de una unidad  $q$  períodos antes en la perturbación  $\epsilon_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , viene dada por el elemento  $M_q(i,j)$ . Está claro, por tanto, que (8) dibuja la respuesta del sistema a shocks en los componentes del vector de perturbaciones  $\epsilon$ .

Un algoritmo sencillo para obtener la sucesión de matrices  $M_s$  a partir del operador autorregresivo es el siguiente. Para un modelo de orden  $m$  evalúese

$$Y(-1) = \dots = Y(-m) = 0$$

y

$$\epsilon(0)' = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\epsilon(1) = \epsilon(2) = \dots = 0$$

donde el 1 del vector  $\epsilon(0)'$  ocupa la  $i$ -ésima columna. Entonces el vector  $Y(q)$  dado por

$$Y(q) = \sum_{s=1}^m B_s Y(q-s) + \epsilon(q), \quad q = 0, 1, \dots$$

es la  $i$ -ésima columna de  $M_q$ .

#### Descomposición de la Varianza del Error de Predicción

Considérese el problema de predecir el vector  $Y(t+K)$ ,  $K \geq 0$ , al principio del período  $t$ . Esta predicción se obtiene observando en primer lugar que a partir de (8) podemos escribir

$$Y(t+K) = M(L)D(t+K) + M_0 \epsilon(t+K) + M_1 \epsilon(t+K-1) + \dots \\ \dots + M_K \epsilon(t) + M_{K+1} \epsilon(t-1) + \dots \quad (9)$$

Tomando entonces expectativas a ambos lados de (9) en base a la información disponible al principio del período  $t$  obtenemos

$$E_t Y(t+K) = M(L)D(t+K) + M_{K+1} \epsilon(t-1) + M_{K+2} \epsilon(t-2) + \dots \quad (10)$$

puesto que la predicción del componente determinístico es perfecta, y  $E_t \epsilon(t+K) = 0$  para  $K \geq 0$ .

Combinando (9) y (10) se obtiene el error cometido al predecir  $K$  períodos hacia adelante el vector  $Y$ . En concreto, se obtiene

$$Y(t+K) - E_t Y(t+K) = \sum_{s=0}^K M_s \epsilon(t+K-s) \quad (11)$$

variable aleatoria cuya varianza viene dada por

$$\text{Var}[Y(t+K) - E_t Y(t+K)] = \sum_{s=0}^K M_s \Sigma M_s' \quad (12)$$

El ejercicio de descomposición de varianza consiste en descomponer (12) en componentes que permitan aislar el porcentaje de variabilidad de  $Y_i$  explicado por  $\epsilon_j$   $i, j=1, \dots, n$ , para distintos horizontes predictivos. Tal descomposición se obtiene con relativa facilidad en el caso en que los componentes del vector de perturbaciones  $\epsilon$  son ortogonales. En concreto, supongamos que lo son y volvamos a la expresión (11), el error de predicción con horizonte  $K$ . Definamos a partir de (11) el siguiente conjunto de vectores

$$P_i = \sum_{s=0}^K M_s R_i \epsilon(t+K-s) \quad i = 1, \dots, n$$

donde  $R_i$ ,  $n \times n$ , contiene ceros en todas sus entradas excepto en la posición  $i$ -ésima de la diagonal principal que contiene un uno. La conveniencia de definir los vectores  $P_i$  se hace evidente cuando se observa que cada uno de ellos involucra exclusivamente a los componentes  $i$ -ésimos de los vectores de perturbaciones  $\epsilon(t+K-s)$ ,  $s=0, \dots, K$ , los únicos capturados por el producto  $R_i \epsilon(t+K-s)$ . Además,  $R_i$  es idempotente, y  $M_s R_i$  captura la columna  $i$ -ésima de la matriz  $M_s$ , por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=0}^K M_s \varepsilon(t+K-s) &= \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^K M_s R_i \varepsilon(t+K-s) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^K M_s R_i R_i \varepsilon(t+K-s) \\
 &= \sum_{i=1}^n P_i \quad (13)
 \end{aligned}$$

Es decir, hemos expresado el error de predicción como la suma de n componentes ortogonales. A partir de (13) es evidente que

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left[ \sum_{s=0}^K M_s \varepsilon(t+K-s) \right] &= \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^n P_i \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(P_i) \\
 &\equiv P
 \end{aligned}$$

por lo que la varianza del error de predicción con horizonte K de la variable i-ésima viene dada por elemento P(i,i); y la proporción de esa varianza debida a la perturbación j-ésima por el ratio  $P_j(i,i)/P(i,i)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

#### 4. ORTOGONALIZACION DEL VECTOR DE PERTURBACIONES

Los usos descritos en la sección 3 carecen de un sentido claro si el vector de perturbaciones del sistema no es ortogonal, puesto que en tal caso no es posible identificar de forma inequívoca las fuentes de variabilidad del sistema. El supuesto de ortogonalidad sólo ha sido utilizado de forma explícita en la obtención de la descomposición de la varianza del error de predicción, pero es obvio que también es necesario para el cómputo de la función impulso-respuesta, puesto que no tendría mucho sentido examinar la respuesta del sistema a una perturbación aislada si tal perturbación ha tendido a producirse en conjunción con otras perturbaciones del sistema.

En general, sin embargo, la matriz de varianzas y covarianzas  $\Sigma$  no es diagonal. Por tanto, una tarea previa a la utilización del modelo debe ser la obtención a partir de  $\epsilon$  de un nuevo vector de perturbaciones cuyos componentes si sean ortogonales. Esta es la tarea a la que hace referencia el término "ortogonalización del vector de perturbaciones", y consiste simplemente en distribuir la responsabilidad de las correlaciones reflejadas en  $\Sigma$  entre los distintos componentes del vector de perturbaciones  $\epsilon$ .

El objetivo de esta sección es describir un método general de ortogonalización poniendo especial énfasis en la conexión entre el modelo originalmente estimado y el obtenido una vez incorporado el vector de perturbaciones ortogonales. La intención al hacer explícita esta conexión es clarificar que el modelo obtenido una vez realizada la ortogonalización no es una forma reducida, sino una forma estructural; y que, por tanto, el proceso de ortogonalización es de hecho una forma de identificación.

### Ortogonalización e Identificación

El método de identificación que pasamos a describir, comienza postulando un modelo lineal en el que el vector de observables  $Y(t)$  es determinado por los valores corrientes y retardados de un vector  $n$ -dimensional de perturbaciones  $v$ . Los componentes de  $v$  son fuentes primarias de variación, interpretables y ortogonales (serial y contemporáneamente) cuya identificación pretendemos. En concreto, escribimos

$$Y(t) - d(t) = A(L)v(t) \quad (14)$$

donde

$$A(L) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s L^s$$

$A_s$  es  $n \times n$

$d(t)$  es un vector  $n \times 1$  de componentes determinísticos

$v(t)$  es  $n \times 1$ , ruido blanco con  $E_t v(t) = 0$ ,  $E_t v(t)v(t)' = \Sigma_v$ , diagonal.

y por conveniencia notacional hemos suprimido el índice temporal de la sucesión de matrices  $A_s$ .

Definiendo  $G(L) \equiv A(L)^{-1}$ , a partir de (14) obtenemos

$$G(L)Y(t) - G(L)d(t) = v(t) \quad (15)$$

expresión que tiene la forma usual de un modelo estructural.  $G(L)$  existirá siempre que  $A_0^{-1}$  exista. Además, por definición de  $G(L)$ , se tiene que  $G_0 A_0 = I$ , por lo que debe cumplirse que  $G_0^{-1} = A_0$ . Como consecuencia, si premultiplicamos ambos lados de (15) por  $A_0$ , obtenemos



$$Y(t) = B(L)Y(t) + D(t) + \epsilon(t) \quad (16)$$

donde

$$B_s = -A_0 G_s \quad s \geq 1$$

$$D(t) = A_0 [G(L)d(t)]$$

$$\epsilon(t) = A_0 v(t)$$

que es la forma reducida (1).

Está claro, por tanto, que una vez obtenido el operador autorregresivo,  $B(L)$ , la identificación del modelo (14) requiere sólo conocer  $A_0$  y  $\Sigma_v$ , puesto que, de acuerdo con (16),

$$G_s = -A_0^{-1} B_s \quad s \geq 1$$

y, por definición,  $G_0 = A_0^{-1}$ . Además, la secuencia  $G_s$  determina unívocamente la secuencia  $A_s$ .

La relación postulada en (16) entre los vectores de perturbaciones  $\epsilon$  y  $v$  permite estimar  $A_0$  y  $\Sigma_v$ . En concreto, se tiene que

$$\epsilon(t) = A_0 v(t)$$

o

$$G_0 \epsilon(t) = v(t) \quad (17)$$

y por tanto

$$\Sigma = A_0 \Sigma_v A_0'$$

o

(18)

$$G_0 \Sigma G_0' = \Sigma_v$$

El siguiente procedimiento de estimación en dos etapas puede entonces aplicarse:

- a) Estímese el operador autorregresivo  $B(L)$  y el componente determinístico  $D$  en (16) y constrúyase un estimador consistente de  $\Sigma$ ,  $\bar{\Sigma}$ .
- b) Usando  $\bar{\Sigma}$  y (18) obténgase estimadores máximo-verosímiles de  $A_0$  y  $\Sigma_v$ .

La función de verosimilitud para el problema de estimación en b) es la distribución conjunta de los vectores de perturbaciones  $\epsilon(t)$ ,  $t=1, \dots, T$  ( $T$  es el tamaño muestral), que, ignorando constantes, es

$$-\frac{T}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \epsilon(t)' \Sigma^{-1} \epsilon(t)$$

y que utilizando (18) y sustituyendo  $\epsilon(t)$  por su estimación muestral puede manipularse para obtener

$$-\frac{T}{2} \log |A_0 \Sigma_v A_0'| - \frac{T}{2} \text{tr}(A_0^{-1} \Sigma_v^{-1} A_0^{-1} \bar{\Sigma}) \quad (19)$$

expresión que debe maximizarse con respecto a  $A_0$  y  $\Sigma_v$  sujeta a la restricción

$$\bar{\Sigma} = A_0 \Sigma_v A_0' \quad (20)$$

El problema puede reescribirse si se observa que, dada la restricción (20), el segundo término en (19) se convierte en  $-nT/2$ . Por tanto, el problema a resolver es maximizar

$$-\frac{T}{2} \log |A_0| - \frac{T}{2} \sum_{j=1}^n \log \Sigma_v(j,j)$$

con respecto a  $A_0$  y  $\Sigma_v(j,j)$ ,  $j=1, \dots, n$ , y sujeto a (20).

Conviene notar que para que el problema de maximización planteado esté bien definido es condición necesaria que el número de parámetros distintos de cero en el lado derecho de (20) no supere el número de valores distintos de la matriz  $\bar{\Sigma}$ , es decir  $(n^2+n)/2$ . También conviene mencionar que los estimadores surgidos de este problema de maximización serán asintóticamente equivalentes a los que se obtendrían si  $\Sigma$  fuera conocida, ya que la matriz de información asociada al problema definido es diagonal por bloques (Durbin, 1970).

El esquema de ortogonalización utilizado en las primeras aplicaciones de la metodología VAR era el denominado esquema de Choleski (Sims, 1980). Este esquema especifica una matriz  $A_0$  triangular inferior con unos en la diagonal principal. En este caso, la solución al problema de maximización es inmediata, puesto que con  $\Sigma_v$  diagonal existe una única manera de expresar una matriz positiva definida en la forma  $A_0 \Sigma_v A_0'$ , por lo que la solución de (20) es única. En general, sin embargo, en aras de un mayor realismo, el analista encuentra conveniente apartarse de la cadena de Wold que implica el esquema de Choleski especificando estructuras para  $A_0$  distintas de la triangular (Ballabriga, 1988; Bernake, 1986; Sims, 1986, 1987).

## 5. APLICACION

A modo de ilustración, esta sección presenta alguno de los resultados obtenidos en una aplicación de la metodología VAR a la economía española (Ballabriga, 1988).

El objetivo principal de la aplicación era intentar evaluar la importancia de las perturbaciones internacionales como fuente de fluctuaciones para la economía española durante el período 1969-1984. Con tal fin, las técnicas descritas en las secciones anteriores fueron aplicadas a un conjunto de 18 variables (7 de ellas internacionales) que caracterizaban las condiciones económicas en España y en el resto del mundo durante el periodo estudiado. Las variables utilizadas y el esquema de ortogonalización estimado se presentan en el Cuadro 1, el esquema escrito en la forma  $A_0^{-1}\epsilon=v$  y con los nombres de las variables representando componentes del vector de perturbaciones  $\epsilon$ .

Se estiman 70 de los  $(18^2-18)/2=153$  parámetros de  $A_0^{-1}$  que como máximo podrían estimarse<sup>6</sup>. El esquema no es ambicioso en términos de identificación en el sentido de que persigue la identificación de bloques de comportamiento más que de ecuaciones individuales de comportamiento. La estrategia seguida es intentar aislar las fuentes de variabilidad asociadas a determinados sectores y mercados. En concreto, se trata de identificar nueve bloques de comportamiento agrupados en el Cuadro 1 en el siguiente orden: consumo-producción nacional, mercado de trabajo nacional, sector gubernamental nacional, mercado de dinero nacional, tipo de cambio nacional, consumo-producción internacional, sector gubernamental internacional, mercado de dinero internacional y comportamiento de los precios energéticos. Todos los bloques están triangularizados excepto los del mercado de dinero y el del tipo de cambio nacional.

El cómputo de la descomposición de varianza y de la función impulso-respuesta asociadas al sistema estimado sugirió, entre otras, dos conclusiones interesantes. En primer lugar, el dominio de las perturbaciones domésticas como fuente de fluctuaciones para la economía española durante el período 1969-1984. En segundo lugar, la preponderancia de los flujos reales sobre los financieros como mecanismo de transmisión de las perturbaciones internacionales. En concreto, las perturbaciones internacionales más efectivas eran aquellas que tenían un efecto claro sobre el nivel de exportaciones españolas.

El Cuadro 2 y la figura 1 contienen, respectivamente, la proporción de la varianza del error de predicción de las variables nacionales explicada por la variabilidad de las exportaciones y la respuesta de las mismas variables a un shock de una desviación típica a las exportaciones. Ambos cálculos sugieren las mismas interacciones dinámicas, interacciones que a la luz del esquema de ortogonalización presentado en el Cuadro 1 admiten la siguiente interpretación:

Un aumento de las exportaciones incentiva la producción y genera un aumento de las importaciones. La oferta monetaria responde contemporáneamente al mayor nivel de actividad provocando un ligero incremento de la cantidad de dinero y el correspondiente descenso del tipo de interés, lo que puede estar proporcionando parte del incentivo para el incremento de la producción. Los precios experimentan un ligero incremento con el paso del tiempo. El gasto público muestra un comportamiento contracíclico, descendiendo ligeramente en respuesta al incremento de la producción. Las fuerzas de signo opuesto que afectan al valor de la moneda nacional (exportaciones, importaciones y tipo de interés) parecen compensarse dejando el tipo de cambio prácticamente inafectado. Ni la tasa de desempleo ni el salario nominal son afectados de una forma clara a lo largo del proceso.

Obsérvese que todos los efectos presentados en el Cuadro 2 y la Figura 1 son muy persistentes y significativos, como muestran las desviaciones típicas que los acompañan. Estas desviaciones fueron calculadas mediante un ejercicio de Montecarlo utilizando la distribución a posteriori del operador autorregresivo. El método de Montecarlo es la única vía practicable para este cálculo dada la relación altamente no lineal que existe entre las representaciones autorregresiva y de medias móviles.

N o t a s

1. Aquella cuyos orígenes están estrechamente ligados a la fundación Cowles, allá por los años 50.
2. El argumento aplica la siguiente caracterización de la distribución normal multivariante:  
  
 $Z, px1,$  es normal multivariante sí y sólo si  $\forall a \in R^p,$   $a'Z$  es normal.
3. De hecho, esta especificación incorpora el "prestigio predictivo" de los modelos de series temporales univariantes y, entre ellos, el del paseo aleatorio.
4. Esta ley de movimiento intenta reflejar la opinión de que demasiada variabilidad en los coeficientes tiende a empeorar los resultados obtenidos con el modelo. La experiencia respalda esta opinión.
5. A partir de aquí suprimimos el índice temporal del operador autorregresivo con objeto de simplificar la notación. Debe entenderse que el operador es el obtenido una vez procesadas todas las observaciones muestrales.
6. Los 18 parámetros restantes hasta el máximo posible de  $(18^2+18)/2$  son los elementos de la diagonal principal de  $\Sigma_v$ .

CUADRO 1  
Esquema de Ortogonalización

Los nombres de las variables representan en este cuadro los componentes correspondientes del vector de perturbaciones  $\epsilon$ . El número entre paréntesis es el estadístico  $t$ .

VARIABLES NACIONALES

unempl	Tasa de Desempleo
spipi	Output
spcpi	Precios
spwage	Salarios Nominales
sprev	Ingresos Públicos
spexp	Gasto Público
spimp	Importaciones
spxpt	Exportaciones
spml	Stock Monetario
spltr	Tipo de Interés
sprexr	Tipo de Cambio

VARIABLES INTERNACIONALES

wipi	Output
wcpi	Precios
wrev	Ingresos Públicos
wexp	Gasto Público
wml	Stock Monetario
wltr	Tipo de Interés
opi	Precios Energéticos



$$\begin{aligned} \text{spipi} &= 1.16\text{sprev} + 4.22\text{spexp} - 17.3\text{spltr} + 43.6\text{sprexr} - 9.7\text{wipi} - \\ &\quad (0.54) \quad (1.39) \quad (-0.93) \quad (0.96) \quad (-0.90) \\ &\quad -73.5\text{wcpi} + 1.59\text{opi} + v_1 \\ &\quad (-0.71) \quad (0.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{spcpi} &= 0.037\text{spipi} + 0.099\text{sprev} + 0.16\text{spexp} - 0.19\text{spltr} - \\ &\quad (0.14) \quad (0.82) \quad (1.21) \quad (-0.91) \\ &\quad -0.28\text{sprexr} - 0.16\text{wipi} + 2.52\text{wcpi} - 0.082\text{opi} + v_2 \\ &\quad (-0.81) \quad (-0.57) \quad (1.21) \quad (-1.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{spxpt} &= -1.27\text{spipi} - 1.32\text{spcpi} + 0.089\text{sprev} + 0.15\text{spexp} + 1.45\text{spltr} - \\ &\quad (-0.53) \quad (-0.48) \quad (0.49) \quad (0.69) \quad (1.31) \\ &\quad -0.15\text{sprexr} + 2.13\text{wipi} - 0.68\text{wcpi} + 0.11\text{opi} + v_3 \\ &\quad (-0.26) \quad (1.10) \quad (-0.13) \quad (0.47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{spimp} &= 3.47\text{spipi} + 2.9\text{spcpi} + 0.11\text{sprev} + 0.014\text{spexp} - 0.43\text{spxpt} - \\ &\quad (2.46) \quad (1.87) \quad (0.64) \quad (0.08) \quad (-1.24) \\ &\quad -0.59\text{spltr} - 1.61\text{sprexr} - 1.8\text{wipi} + 11.7\text{wcpi} - 0.36\text{opi} + v_4 \\ &\quad (-0.65) \quad (-2.91) \quad (-1.26) \quad (2.47) \quad (-1.92) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{unempl} &= -0.41\text{spipi} + v_5 \\ &\quad (-1.56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{spwage} &= -0.011\text{unempl} + 0.15\text{spcpi} + v_6 \\ &\quad (-0.11) \quad (0.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{spexp} &= 0.39\text{unempl} - 10.7\text{spcpi} + v_7 \\ &\quad (1.71) \quad (-2.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sprev} &= 0.018\text{spipi} - 1.99\text{spcpi} + 0.46\text{spexp} + v_8 \\ &\quad (0.03) \quad (-0.84) \quad (1.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{spml} &= -0.32\text{spltr} + v_9 \\ &\quad (-2.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{spltr} &= -1.04\text{spipi} - 0.33\text{spcpi} + 0.74\text{spml} - 0.18\text{sprexr} + 0.27\text{wltr} + v_{10} \\ &\quad (-3.60) \quad (-0.43) \quad (1.94) \quad (-0.74) \quad (1.91) \end{aligned}$$

$$\text{sprexr} = -2.0\text{spimp} + 0.77\text{spxpt} + 0.39\text{spltr} + 9.6\text{wcpi} + v_{11}$$

(-2.11)      (1.16)      (0.68)      (1.78)

$$\text{wipi} = -3.89\text{wrev} + 34.8\text{wexp} + 10.0\text{wltr} + 0.76\text{opi} + v_{12}$$

(-0.55)      (1.62)      (1.43)      (1.57)

$$\text{wcpi} = 0.045\text{wipi} - 0.046\text{wrev} + 0.035\text{wexp} - 0.018\text{wltr} + 0.017\text{opi} + v_{13}$$

(1.34)      (-2.15)      (1.64)      (-1.04)      (4.42)

$$\text{wexp} = -32.1\text{wipi} - 66.4\text{wcpi} + v_{14}$$

(-2.26)      (-1.92)

$$\text{wrev} = -0.056\text{wipi} + 3.39\text{wcpi} + 0.24\text{wexp} + v_{15}$$

(-0.23)      (1.61)      (0.93)

$$\text{wml} = 0.38\text{wipi} + 9.31\text{wcpi} - 1.6\text{wltr} + v_{16}$$

(1.27)      (2.45)      (3.92)

$$\text{wltr} = 195.1\text{wml} + v_{17}$$

(1.0)

$$\text{opi} = v_{18}$$

CUADRO 2  
Descomposición de Varianza

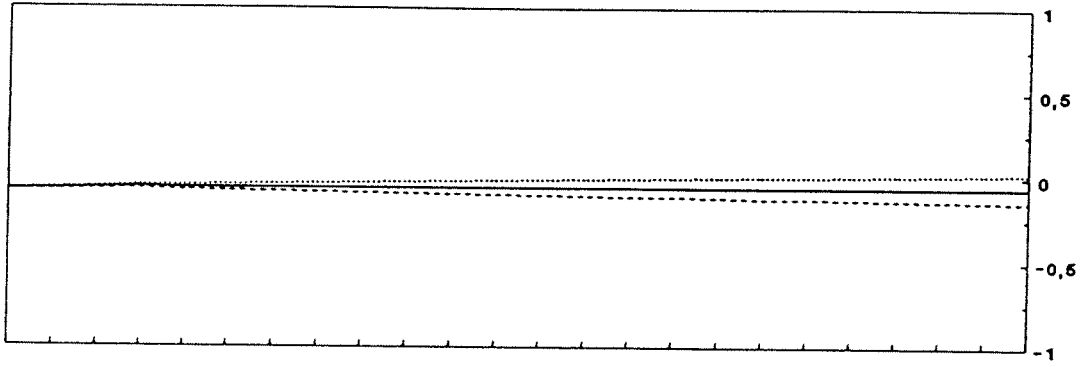
Los números en las columnas representan la proporción media de la varianza del error de predicción en las variables nacionales explicada por la variabilidad de las exportaciones para horizontes temporales de predicción de 1, 4, 8, 12 y 24 trimestres. La desviación típica se da entre paréntesis.

	0.5		14.0
	0.5(0.09)		14.0(0.5)
UNEMPL	0.6(0.2)	SPIMP	13.9(1.2)
	0.6(0.4)		13.9(1.9)
	0.9(0.9)		13.2(3.9)
	14.7		56.5
	14.7(0.8)		56.4(0.5)
SPIPI	14.5(2.0)	SPXPT	56.1(1.3)
	14.2(3.1)		55.7(2.1)
	12.6(5.7)		52.8(4.7)
	0.5		1.9
	0.7(0,3)		1.8(0.5)
SPCPI	1.2(1.1)	SPMI	2.0(1.2)
	1.9(1.9)		2.3(1.9)
	4.1(4.4)		3.5(4.0)
	0.0		8.9
	0.01(0.02)		8.9(0.6)
SPWAGE	0.08(0.09)	SPLTR	8.8(1.5)
	0.1(0.2)		8.8(2.3)
	0.7(0.8)		8.7(4.6)
	0.4		0.5
	0.4(0.06)		0.6(0.1)
SPREV	0.4(0.1)	SPREXR	0.6(0.3)
	0.5(0.2)		0.7(0.6)
	0.7(0.6)		1.3(1.5)
	1.3		
	1.3(0.1)		
SPEXP	1.4(0.3)		
	0.5(0.6)		
	1.7(1.4)		

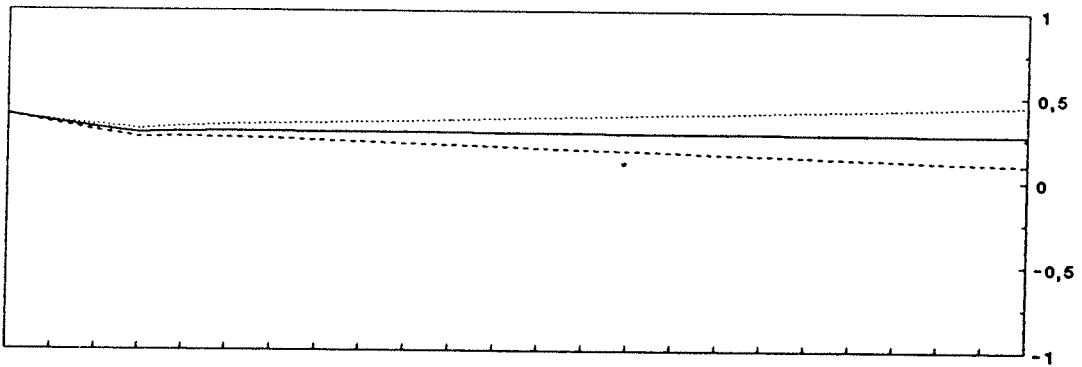
FIGURA 1  
Impulso-Respuesta

Cada gráfico contiene la respuesta media (medida en desviaciones típicas) de la variable correspondiente a un shock de una desviación típica en las exportaciones. La respuesta se da para un horizonte temporal de 24 trimestres, acompañada de una banda de más/menos una desviación típica.

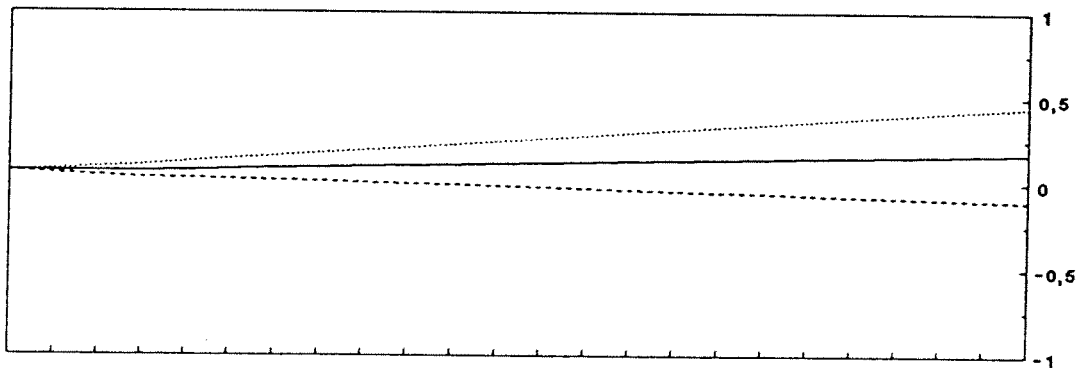
UNEMPL



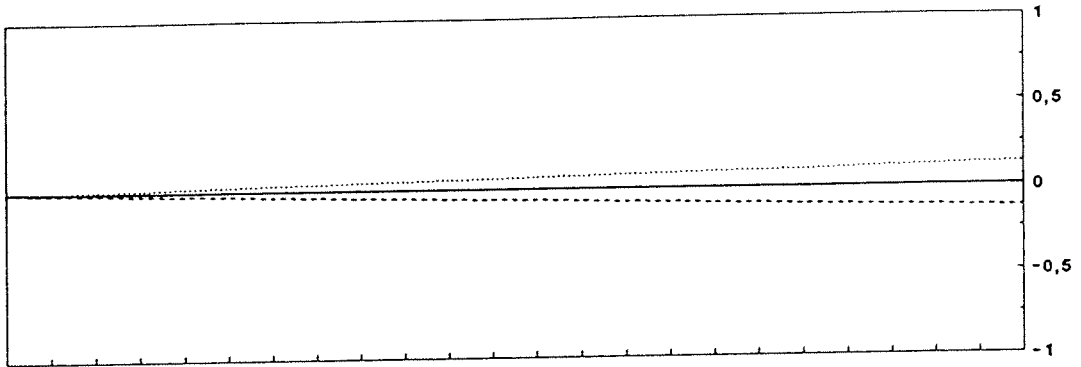
SPIPI



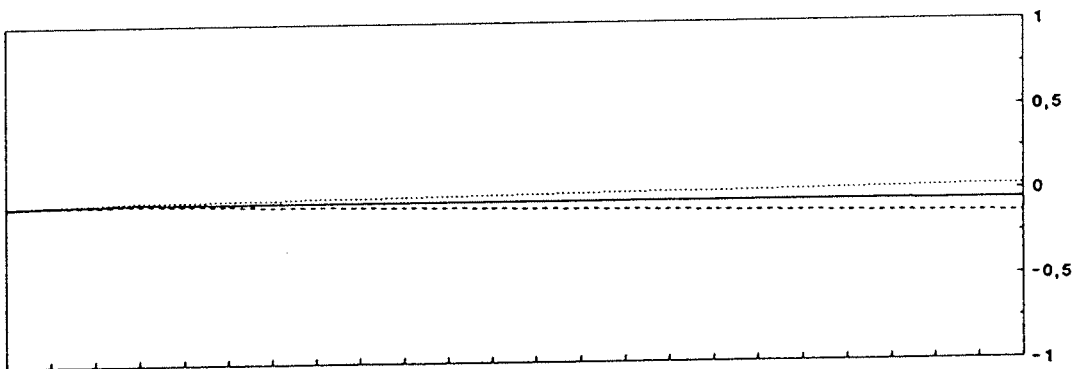
SPCPI



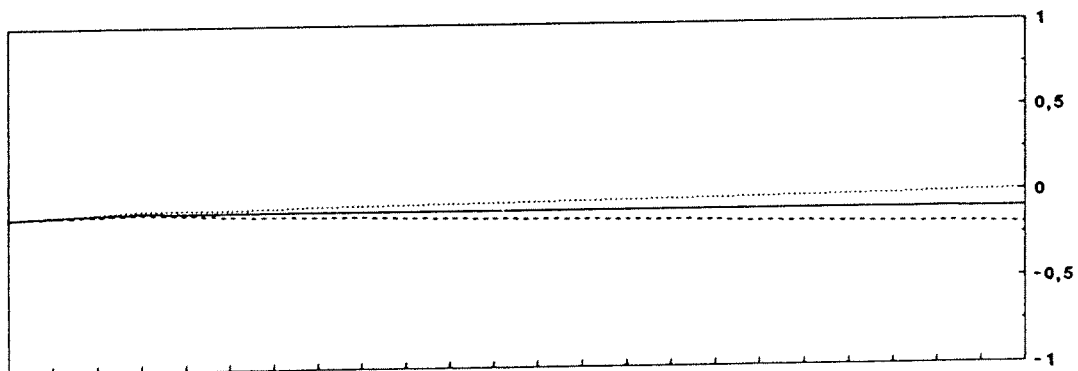
SPWAGE



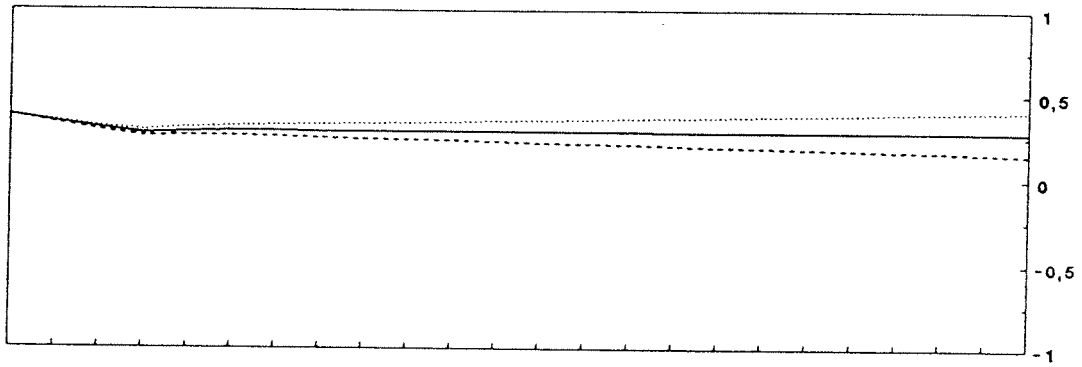
SPREV



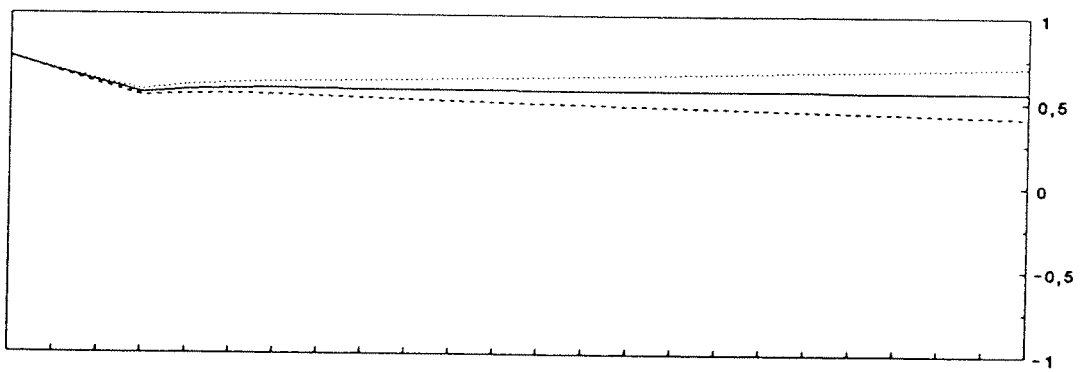
SPEXP



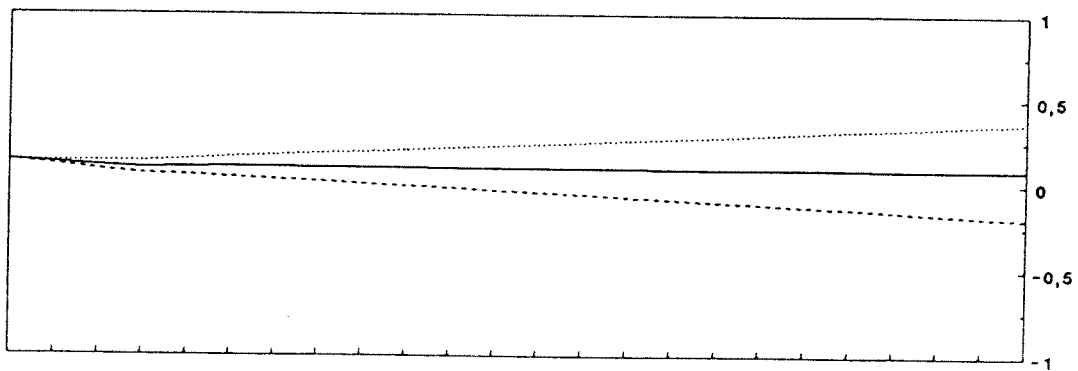
SPIMP



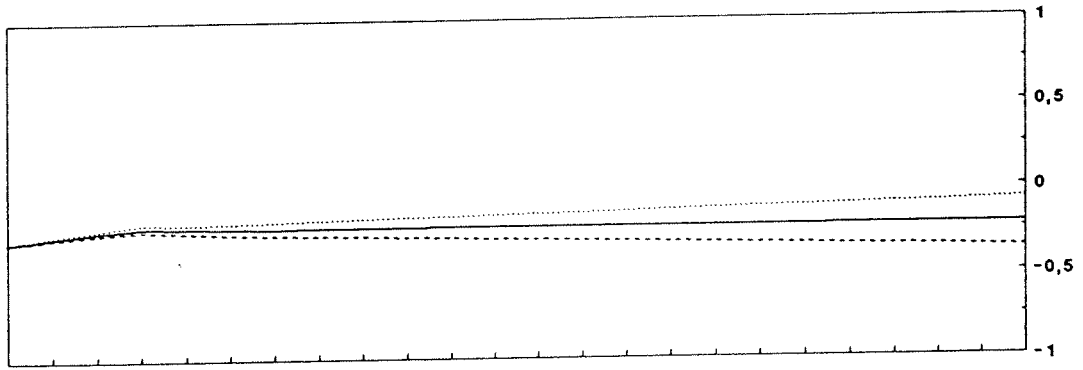
SPXPT



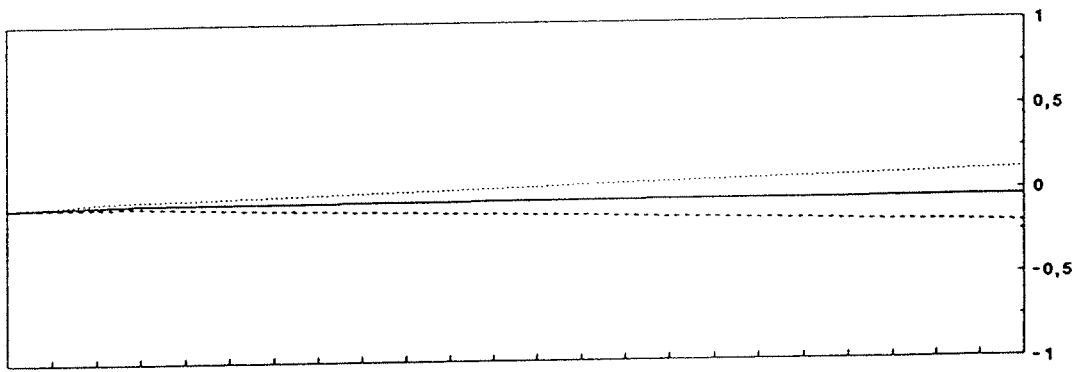
SPM1



SPLTR



SPREXR





**BIBLIOGRAFIA**

- Ballabriga, F.C. 1988. Transmission Mechanisms in an Open Economy: Spain 1969-1984. Tesis Doctoral.
- Bernanke, B. 1986. Alternative explanations of the money-income correlation. En Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy. No. 25, Fall. North-Holland-Amsterdam.
- Doan, Litterman and Sims 1984. Forecasting and Conditional projection using realistic prior distributions. En Econometric Reviews 3 (1).
- Durbin, S. 1970. Testing for serial correlation in least square regression when some of the regressors are lagged dependent variables. Econometrica.
- Litterman, R. 1984. Specifying vector autoregressions for macroeconomic forecasting. Federal Reserve Bank of Minneapolis, Research Department Staff Report 92. March.
- Sims, C. 1980. Macroeconomics and reality. Econometrica 48. January.
- Sims, C. 1986. Are forecasting models usable for policy analysis? Federal Reserve Bank of Minneapolis. Quartely Review. Winter.
- Sims, C. 1987. Identifying policy effects. Federal Reserve Bank of Minneapolis Research Department. Working paper 351. May.



**DOCUMENTOS DE TRABAJO (1):**

- 8601 **Agustín Maravall:** Revisions in ARIMA signal extraction.
- 8602 **Agustín Maravall and David A. Pierce:** A prototypical seasonal adjustment model.
- 8603 **Agustín Maravall:** On minimum mean squared error estimation of the noise in unobserved component models.
- 8604 **Ignacio Mauleón:** Testing the rational expectations model.
- 8605 **Ricardo Sanz:** Efectos de variaciones en los precios energéticos sobre los precios sectoriales y de la demanda final de nuestra economía.
- 8606 **F. Martín Bourgón:** Índices anuales de valor unitario de las exportaciones: 1972-1980.
- 8607 **José Viñals:** La política fiscal y la restricción exterior. (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
- 8608 **José Viñals and John Cuddington:** Fiscal policy and the current account: what do capital controls do?
- 8609 **Gonzalo Gil:** Política agrícola de la Comunidad Económica Europea y montantes compensatorios monetarios.
- 8610 **José Viñals:** ¿Hacia una menor flexibilidad de los tipos de cambio en el sistema monetario internacional?
- 8701 **Agustín Maravall:** The use of ARIMA models in unobserved components estimation: an application to spanish monetary control.
- 8702 **Agustín Maravall:** Descomposición de series temporales: especificación, estimación e inferencia (Con una aplicación a la oferta monetaria en España).
- 8703 **José Viñals y Lorenzo Domingo:** La peseta y el sistema monetario europeo: un modelo de tipo de cambio peseta-marco.
- 8704 **Gonzalo Gil:** The functions of the Bank of Spain.
- 8705 **Agustín Maravall:** Descomposición de series temporales, con una aplicación a la oferta monetaria en España: Comentarios y contestación.
- 8706 **P. L'Hotellerie y J. Viñals:** Tendencias del comercio exterior español. Apéndice estadístico.
- 8707 **Anindya Banerjee and Juan Dolado:** Tests of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis in the Presence of Random Walks: Asymptotic Theory and Small-Sample Interpretations.
- 8708 **Juan J. Dolado and Tim Jenkinson:** Cointegration: A survey of recent developments.
- 8709 **Ignacio Mauleón:** La demanda de dinero reconsiderada.
- 8801 **Agustín Maravall:** Two papers on arima signal extraction.
- 8802 **Juan José Camio y José Rodríguez de Pablo:** El consumo de alimentos no elaborados en España: Análisis de la información de Mercasa.
- 8803 **Agustín Maravall and Daniel Peña:** Missing observations in time series and the «dual» autocorrelation function.
- 8804 **José Viñals:** El Sistema Monetario Europeo. España y la política macroeconómica. (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
- 8805 **Antoni Espasa:** Métodos cuantitativos y análisis de la coyuntura económica.
- 8806 **Antoni Espasa:** El perfil de crecimiento de un fenómeno económico.
- 8807 **Pablo Martín Aceña:** Una estimación de los principales agregados monetarios en España: 1940-1962.
- 8808 **Rafael Repullo:** Los efectos económicos de los coeficientes bancarios: un análisis teórico.
- 8901 **M.ª de los Llanos Matea Rosa:** Funciones de transferencia simultáneas del índice de precios al consumo de bienes elaborados no energéticos.
- 8902 **Juan J. Dolado:** Cointegración: una panorámica.
- 8903 **Agustín Maravall:** La extracción de señales y el análisis de coyuntura.
- 8904 **E. Morales, A. Espasa y M. L. Rojo:** Métodos cuantitativos para el análisis de la actividad industrial española. (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
- 9001 **Jesús Albarracín y Concha Artola:** El crecimiento de los salarios y el deslizamiento salarial en el período 1981 a 1988.
- 9002 **Antoni Espasa, Rosa Gómez-Churruca y Javier Jareño:** Un análisis econométrico de los ingresos por turismo en la economía española.
- 9003 **Antoni Espasa:** Metodología para realizar el análisis de la coyuntura de un fenómeno económico. (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
- 9004 **Paloma Gómez Pastor y José Luis Pellicer Miret:** Información y documentación de las Comunidades Europeas.

- 9005 **Juan J. Dolado, Tim Jenkinson and Simon Sosvilla-Rivero:** Cointegration and unit roots: a survey.
- 9006 **Samuel Bentolila and Juan J. Dolado:** Mismatch and Internal Migration in Spain, 1962-1986.
- 9007 **Juan J. Dolado, John W. Galbraith and Anindya Banerjee:** Estimating euler equations with integrated series.
- 9008 **Antoni Espasa y Daniel Peña:** Los modelos ARIMA, el estado de equilibrio en variables económicas y su estimación. (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
- 9009 **Juan J. Dolado and José Viñals:** Macroeconomic policy, external targets and constraints: the case of Spain.
- 9010 **Anindya Banerjee, Juan J. Dolado and John W. Galbraith:** Recursive and sequential tests for unit roots and structural breaks in long annual GNP series.
- 9011 **P. Martínez Méndez:** Nuevos datos sobre la evolución de la peseta entre 1900 y 1936. Información complementaria.
- 9101 **Javier Valles:** Estimation of a growth model with adjustment costs in presence of unobservable shocks.
- 9102 **Javier Valles:** Aggregate investment in a growth model with adjustment costs.
- 9103 **Juan J. Dolado:** Asymptotic distribution theory for econometric estimation with integrated processes: a guide.
- 9104 **José Luis Escrivá y José Luis Malo de Molina:** La instrumentación de la política monetaria española en el marco de la integración europea. (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
- 9105 **Isabel Argimón y Jesús Briones:** Un modelo de simulación de la carga de la deuda del Estado.
- 9106 **Juan Ayuso:** Los efectos de la entrada de la peseta en el SME sobre la volatilidad de las variables financieras españolas.
- 9107 **Juan J. Dolado y José Luis Escrivá:** La demanda de dinero en España: definiciones amplias de liquidez.
- 9108 **Fernando C. Ballabriga:** Instrumentación de la metodología VAR.

(1) Los Documentos de Trabajo anteriores a 1986 figuran en el catálogo de publicaciones del Banco de España.

**Información:** Banco de España  
Sección de Publicaciones. Negociado de Distribución y Gestión  
Teléfono: 338 51 80  
Alcalá, 50. 28014 Madrid